Théorème d'Hadamard-Lévy

203 221
204 214
220 215

Définition : Une application $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ est dite propre si pour tout $K\subseteq\mathbb{R}^n$ compact, $f^{-1}(K)$ est compact ce qui équivaut à dire $\|f(x)\|\xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{}+\infty$

Théorème : (d'Hadamard-Lévy) Soit $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.
Alors : f est un $\mathcal{C}^1$-difféo global de $\mathbb{R}^n$ ssi f est propre et $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $d_xf\in GL(\mathbb{R}^n)$

Preuve :

L'idée pour ce développement est d'utiliser l'hypothèse $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $d_xf\in GL(\mathbb{R}^n)$ et d'appliquer le TIL pour obtenir des $\mathcal{C}^1$-difféo locaux. Il s'agit alors de montrer que f est bijective.

$\Rightarrow$ Supposons que f est un $\mathcal{C}^1$-difféo sur $\mathbb{R}^n$

- Par $f^{-1}\circ f=id$, on a $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $d_{f(x)}f^{-1}\circ d_xf=id$ alors : $\forall x\in\mathbb{R}^n$, $d_xf\in GL(\mathbb{R}^n)$.
- Soit $K\subseteq\mathbb{R}^n$ compact. Ainsi, $f^{-1}(K)$ est compact car f^{-1} est continue, d'où f propre.

$\Leftarrow$ Supposons f propre et $\forall x\in d_xf\in GL(\mathbb{R}^n)$.
Soit $z\in\mathbb{R}^n$. Montrons que $\mathrm{card}(f^{-1}\{z\})=1$.
Quitte à considérer $f-z$, ops $z=0$.

■ Montrons qu'il existe un antécédent à 0.

Soit $F:\begin{array}{l}\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\\ x\mapsto-(d_xf)^{-1}\circ f(x)\end{array}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$

Soit (E) le problème de Cauchy $\begin{cases}y'=F(y)\\ y(0)=q\in\mathbb{R}^n\end{cases}$.

Soit, par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\varphi(\cdot;q)$ l'unique solution maximale de (E) définie sur $[0;T^*[$.

Soit $g:\begin{array}{l}[0;T^*[\to\mathbb{R}^n\\ t\mapsto f\circ\varphi(t;q)\end{array}\in\mathcal{C}^1$, $t\in[0;T^*[$.

$$g'(t)=d_{\varphi(t;q)}f\circ\partial_t\varphi(t;q)$$
$$=d_{\varphi(t;q)}f\circ\left[-(d_{\varphi(t;q)}f)^{-1}\circ f(\varphi(t;q))\right]$$
$$=-g(t)$$

Ainsi, $\forall t\in[0;T^*[$, $g(t)=f(\varphi(t;q))=e^{-t}f(q)$.
En particulier, le flot $\varphi(\cdot;q)$ est à valeurs dans $f^{-1}(\mathcal{B}(0;\|f(q)\|))$ qui est compact puisque f est propre. Par le théorème de sortie de tout compact, φ est globale i.e. $T^*=+\infty$.

De plus, comme le flot est à valeurs dans un compact, $\exists(t_k)\in[0;+\infty[^{\mathbb{N}}\setminus\varphi(t_k;q)\xrightarrow[+\infty]{}y\in\mathbb{R}^n$

Par continuité de f, $f(\varphi(t_k;q))\xrightarrow[+\infty]{}f(y)$
$$\overset{\shortparallel}{e^{-t_k}f(q)}\xrightarrow[+\infty]{}\overset{\shortparallel}{0}$$
On a ainsi trouvé un antécédent à 0.

■ Montrons que y est unique

Par le théorème d'inversion locale, $\exists U_y\in\mathcal{V}_y\setminus\exists B_y:=\mathcal{B}(0;S_y)\setminus f:U_y\to B_y$ est un $\mathcal{C}^1$-difféo.

- Supposons qu'il existe $t_0\in[0;+\infty[$ tel que $\varphi(t_0;q)\in U_y$.

Soit :
$A:=\{t\in[t_0;+\infty[\mid\varphi(t;q)\in U_y\}=\varphi^{-1}(U_y;q)$ ouvert
$B:=\{t\in[t_0;+\infty[\mid\varphi(t;q)=(f_{|U_y}^{-1})(e^{-t}f(q))\}=\left[\varphi(\cdot;q)-f_{|U_y}^{-1}(e^{-\cdot}f(q))\right]^{-1}\{0\}$ fermé.

De plus, par construction, $A=B$
$\subseteq$ Puisque $f(\varphi(t_0;q))=e^{-t_0}f(q)\in B_y$ et comme sa norme décroît lorsque $t\to+\infty$, on a : $\forall t\geq t_0$, $f(\varphi(t;q))\in B_y$. En appliquant $f_{|U_y}^{-1}$, on a ok.
$\supseteq$ Oui par construction.

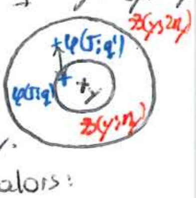
Ainsi, $A=B=[t_0;+\infty[$ par connexité de ce dernier
Alors : $\varphi(t;q)=f_{|U_y}^{-1}(e^{-t}f(q))\xrightarrow[+\infty]{}f_{|U_y}^{-1}(\{0\})=y$

- Soit $\forall y\in f^{-1}(\{0\})$, $W_y:=\{q\in\mathbb{R}^n\mid\varphi(t;q)\xrightarrow[+\infty]{}y\}$

Par ce qui précède, $\mathbb{R}^n=\bigsqcup_{y\in f^{-1}(\{0\})}W_y$. (*)

En effet, ▲ $\subseteq$ Soit $q\in\mathbb{R}^n$. Alors $\exists y\in\mathbb{R}^n\setminus\varphi(t;q)\to y$ et alors $q\in W_y$.
▲ $\supseteq$ Par construction des W_y
▲ Soit $q\in W_{y_1}\cap W_{y_2}$. Par unicité de la limite, $y_1=y_2$. Ainsi, les W_y sont 2 à 2 disjoints.

Montrons que les W_y sont des ouverts non-vides.
▲ $W_y\neq\emptyset$ car $y\in W_y$ (y est équilibre du système)
▲ W_y est ouvert.
Soit U_y comme précédemment, $\eta_y>0$ tq : $\mathcal{B}(y;2\eta_y)\subseteq U_y$
$q\in W_y$ et $T>0$ tq : $\varphi(T;q)\in\mathcal{B}(y;\eta_y)$



Par continuité du flot par rapport à q,
$\exists\delta>0\setminus\|q-q'\|<\delta\Rightarrow\|\varphi(T;q)-\varphi(T;q')\|<\eta_y$.
Ainsi, $\varphi(T;q')\in\mathcal{B}(y;2\eta_y)\subseteq U_y$ et alors :
$$\varphi(t;q')\xrightarrow[+\infty]{}y$$
Ainsi, $\forall q\in\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}(q;\delta)\subseteq W_y$ et alors W_y est ouvert.

Par (*) et par connexité de $\mathbb{R}^n$, $\exists!\,y\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n=W_y$
Ainsi, $\mathrm{card}(f^{-1}(\{0\}))=1$.

Proposition: Le flot $\varphi(t;\cdot)$ est continu.

Preuve:

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $q \in \mathbb{R}^n$.

Comme $\varphi(\cdot;q)$ est solution de (E) : $\begin{cases} y' = F(y) \\ y(0) = q \end{cases}$

avec $F : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto -(d_x f)^{-1} \circ f(x) \end{array}$, en intégrant,

$$\varphi(t;q) = \int_0^t F(\varphi(s;q))\,ds + \underbrace{\varphi(0;q)}_{=q}$$

Soit $p \in \mathbb{R}^n$.

$$\|\varphi(t;q) - \varphi(t;p)\| \leq \|q-p\| + \int_0^t \|F(\varphi(s;q)) - F(\varphi(s;p))\|\,ds$$

Montrons que F est localement lipschitzienne.

Soit V boule compacte telle que $f(\overline{\mathcal{B}(q;1)}) \subseteq V$.

Comme $f(\varphi(t;q)) = e^{-t} f(q)$,

$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall p \in \overline{\mathcal{B}(q;1)}, \quad f(\varphi(t;p)) \in f(\overline{\mathcal{B}(q;1)}) \subseteq V$

Comme f est propre,

$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall p \in \overline{\mathcal{B}(q;1)}, \quad \varphi(t;p) \in f^{-1}(V)$

avec $f^{-1}(V)$ compact.

On a montré que : $\forall p, q,\ \|p-q\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t;p) - \varphi(t;q)\| < \varepsilon$

Puisque F est $\mathcal{C}^1$, sa dérivée est bornée sur tout compact et alors F est localement lipschitzienne.

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t;q) - \varphi(t;p)\| &\leq \|q-p\| + \int_0^t \|F(\varphi(s;q)) - F(\varphi(s;p))\|\,ds \\
&\leq \|q-p\| + \int_0^t K\,\|\varphi(s;q) - \varphi(s;p)\|\,ds
\end{aligned}$$

par le lemme de Gronwall $\leq \|q-p\|\, e^{Kt}$

d'où la continuité.

Temps : 15' 33''